

1. concours général 1991 - exercice 4

énoncé

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.

On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$ possédant la propriété suivante :

si x appartient à A , alors $2x$ n'appartient pas à A .

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie A .

Énoncé

Solution 1

Page d'accueil

Page de Titre



Page 1 de 4

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

2. concours général 1991 - exercice 4

Solution 1

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{N}, n = 2^p \quad E = \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{et } A \in \mathcal{P}(E) \text{ telle que } \forall x \in A, \quad 2x \notin A \end{array} \right.$$

pour $i \in \{0, \dots, p-2\}$ on note B_i l'ensemble des couples

$(2^i + 1; 2^{i+1} + 2) (2^i + 2; 2^{i+1} + 4) \dots (2^i + k; 2^{i+1} + 2k) (2^{i+1}; 2^{i+2})$. On a $B_i \subset E$

Pour chaque couple (a, b) de B_i on a $b = 2a$.

Par conséquent, au moins un élément de $\{a; b\}$ n'appartient pas à A .

On note $\left\{ \begin{array}{l} B = \{(1, 2) \cup B_1 \cup B_3 \cup \dots \cup B_{p-2}\} \text{ si } p \text{ est impair} \\ \text{et } B = \{(1, 2) \cup B_2 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{p-2}\} \text{ si } p \text{ est pair} \end{array} \right.$

Pour tout $i \in \{0, \dots, p-2\}$ on note $\left\{ \begin{array}{l} a_{i_k} = 2^i + k \\ \text{et } b_{i_k} = 2^{i+1} + 2k \end{array} \right. \quad k \in \{1; \dots; 2^i\}$ Notons que tous les nombres a_{i_k} et b_{i_k} appartenant à B sont différents car $a_{i_{2^i}} < b_{i_{2^i}}$. D'autre part on a toujours $b_{i_k} = 2a_{i_k}$ donc parmi tous les nombres des couples appartenant à B la moitié au moins n'appartient pas à A . Il suffit donc de dénombrer les couples de B :

On a $\text{card} B_i = 2^i$ d'après la définition de B_i .

donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{card} B = 1 + 2^1 + 2^3 + \dots + 2^{p-2} \quad \text{si } p \text{ impair} \\ \text{card} B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{p-2} \quad \text{si } p \text{ pair} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{p-2} &= 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{\frac{p-2}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \left(4^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} (2^p - 4) \end{aligned}$$

d'où si p pair $\text{card} B = 1 + \frac{1}{3} (2^p - 4) = \frac{1}{3} (2^p - 1)$

si p impair

$$\begin{aligned} \text{card}B &= 1 + 2(2^0 + 2^3 + \dots + 2^{p-3}) = 1 + 2\left(\frac{1}{3}(2^{p-1} - 1)\right) \\ &= \frac{1}{3}(2^p + 1) \end{aligned}$$

Or $\text{card}E = 2^p$

donc $\text{card}A \leq \text{card}E - \text{card}B$

d'où si p pair $\text{card}A \leq \frac{1}{3}(2^{p+1} + 1)$

si p impair $\text{card}A \leq \frac{1}{3}(2^{p+1} - 1)$

On va vérifier que ce maximum est atteint :

Soit $A = \{2^p; 2^p - 1; \dots; 2^{p-1} + 1\} \cup \{2^{p-2}; \dots; 2^{p-3} + 1\} \cup \dots \cup \{2\}$ si p est impair

$A = \{2^p; 2^p - 1; \dots; 2^{p-1} + 1\} \cup \{2^{p-2}; \dots; 2^{p-3} + 1\} \cup \dots \cup \{2^2; 2^1 + 1\} \cup \{1\}$ si p est pair

On vérifie aisément que A possède bien la propriété $x \in A: 2x \notin A$.

D'autre part on calcule $\text{card}A = (2^p - 2^{p-1}) + (2^{p-2} - 2^{p-3}) + \dots + (2^2 - 2^1) + 1$ si p est pair

et si p est impair $\text{card}A = (2^p - 2^{p-1}) + (2^{p-2} - 2^{p-3}) + \dots + (2^3 - 2^2) + 1$

d'où si p est pair

$$\begin{aligned} \text{card}A &= (2^{p-1} + 2^{p-3} + \dots + 2^1 + 1) \\ &= 1 + 2(1 + 2^3 + \dots + 2^{p-2}) \\ &= \frac{1}{3}(2^{p+1} + 1) \end{aligned}$$

Si p est impair

$$\begin{aligned} \text{card}A &= (2^{p-1} + 2^{p-3} + \dots + 2^1 + 1) \\ &= 1 + 2(2^1 + 2^3 + \dots + 2^{p-2}) \\ &= \frac{1}{3}(2^{p+1} - 1) \end{aligned}$$

Donc le maximum est atteint.

Énoncé

Solution 1

Page d'accueil

Page de Titre



Page 4 de 4

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter