Netto

Lehrbuch der Combinatorik

707
1892
1894

8302

Er nimmt m Reihen von Elementen an, etwa

$$\begin{array}{c} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1\nu_1}, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2\nu_2} \\ \cdots\cdots \\ a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots a_{m\nu_m} \end{array}$$

und denkt sich gleichzeitig m Kästen, deren erster ν_1 Plätze hat, deren zweiter ν_2 Plätze hat, u. s. f. Die Verteilung der Elemente findet in die Plätze der Kästen statt. Dann heissen zwei Verteilungen „verwandt" oder „conjugiert", wenn bei der ersten Verteilung das

Allgemeiner gilt der Satz, dass die Z… Complexion von n Elementen sich mit de… gekehrten, von rechts nach links gelesenen… plexion gehört, zu $\binom{n}{2}$ ergänzt. Denn es giebt… von n Elementen $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, ein… Element $a_\varkappa$ und a_λ mit einander zu vergleich… Inversion, so liefert $a_\lambda a_\varkappa$ keine, und umgek… keiten liefert also in der einen von beiden C…

Elementen an, etwa

$, \dots a_{1\nu_1},$

$, \dots a_{2\nu_2}$

$\dots$

$, \dots a_{m\nu_m}$

Kästen, deren erster ν_1 Plätze hat,
u. s. f. Die Verteilung der Elemente
statt. Dann heissen zwei Verteilungen
wenn bei der ersten Verteilung das
bei der zweiten Verteilung das Element

alle Elemente mit gleichem ersten

Allgemeiner gilt der Satz, dass die Zahl der Inversionen einer Complexion von n Elementen sich mit derjenigen, welche zur umgekehrten, von rechts nach links gelesenen, der „inversen“ Complexion gehört, zu $\binom{n}{2}$ ergänzt. Denn es giebt bei einer jeden Complexion von n Elementen $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, ein früheres und ein späteres Element $a_\varkappa$ und a_λ mit einander zu vergleichen. Liefert nun $a_\varkappa a_\lambda$ eine Inversion, so liefert $a_\lambda a_\varkappa$ keine, und umgekehrt. Jede dieser Möglichkeiten liefert also in der einen von beiden Complexionen eine Inversion.

Vertauscht man zwei auf einander folgende Elemente einer Complexion, dann ändert sich die Anzahl der Inversionen dieser Complexion um ± 1. Denn durch Vertauschung von $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ wird in dem Verhalten zu den übrigen Elementen keine Aenderung hervorgerufen; in dem Verhalten der beiden unter einander dagegen wird eine Aenderung eintreten; lieferte $a_\varkappa a_{\varkappa+1}$ eine Inversion, dann liefert $a_{\varkappa+1} a_\varkappa$ keine solche und umgekehrt. Ferner sieht man leicht, dass die

[redacted]

... Anzahl der Inversionen, ... h

s zunächst die Elemente
n geordnet; sie mögen
llert die zu 3. gehörige
nau $(j_1 - 1)$ Inversionen,
r den k vorkommen; das
) Inversionen, weil ja die
$- 1)$ unter den k vor-
Anzahl bei 3. die Summe

$\left. \frac{+1}{2} \right).$

er i für sich, ebenso die
Zahlen den soeben für 3.
die Gesammtzahl der In-

Elementen teilen sich in
nen. Jedes Paar enthält

mutationen zusammen

tionen von n Elementen,
$I_x^{(n)}$ bezeichnen. Dann ist

$$\left(x = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right),$$

Permutationen.
versionen in allen $I_x^{(n)}$ vor-
)

$n!; \qquad \left(x = 0, 1, \ldots \binom{n}{2}\right).$

, die Frage gestellt; Terquem
tet.

Da die $n!$ ... Paare inverser Permutationen geteilt werden könne... jeder mit x Inversionen eine inverse mit $\binom{n}{2} - x$ Inv... ...lich ist

$$(\gamma) \qquad I_x^{(n)} = I^{(n)}_{\binom{n}{2}-x}.$$

Wir werden jetzt eine Reductionsformel für $I_x^{(n)}$ herleiten. Diejenigen zu $I_x^{(n)}$ gehörigen Permutationen, welche mit 1 beginnen, haben x Inversionen zwischen den Elementen $2, 3, \ldots n$. Ihre Anzahl ist demnach $I_x^{(n-1)}$. Diejenigen zugehörigen Permutationen, welche mit 2 beginnen, haben nur $(x - 1)$ Inversionen zwischen den übrigen Elementen $1, 3, 4, \ldots n$; denn 2 liefert gegenüber 1 schon eine Inversion. Nach der Schlussbemerkung in § 54 giebt dies $I_{x-1}^{(n-1)}$. So geht es fort bis zu $I_{x-n+1}^{(n-1)}$ als der Anzahl derjenigen zugehörigen Permutationen, die mit n beginnen. Wir haben somit

$$(\delta) \qquad I_x^{(n)} = \sum_\alpha I_{x-\alpha}^{(n-1)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots (n-1));$$

dabei fallen diejenigen Summanden rechts fort, bei denen $x < \alpha$ ist.

Hiernach wird

$$\begin{aligned}
I_0^{(n)} &= I_0^{(n-1)} \\
I_1^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
I_{n-1}^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} \\
I_n^{(n)} &= \qquad I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} \\
I_{n+1}^{(n)} &= \qquad\qquad I_2^{(n-1)} + \cdots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} + I_{n+1}^{(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
I_{\binom{n}{2}}^{(n)} &= \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots + I_{\binom{n-1}{2}}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Tabelle tritt in jeder Spalte dasselbe $I_\alpha^{(n-1)}$ genau n-mal auf. Addiert man alle diese Gleichungen spaltenweise, so gelangt man zu

$$\sum_x I_x^{(n)} = n \sum_x I_x^{(n-1)},$$

und dies führt auf die frühere Formel (α). Multipliciert man die Gleichungen abwechselnd mit $+1$ und -1 und summiert sie dann, so ergiebt sich für ein gerades n direct

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - I_3^{(n)} + \cdots = 0.$$

Für ein ungerades n folgt zunächst

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \dots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \dots$$

und da $(n-1)$ ungerade ist, wiederum Null. Man findet demnach allgemein

$$(\varepsilon) \qquad \sum_\alpha (-1)^\alpha I_\alpha^{(n)} = 0 \qquad \left(\alpha = 0, 1, \dots \binom{n}{2}\right),$$

d. h. die Anzahl aller Permutationen von n Elementen mit einer geraden Zahl von Inversionen ist gleich derjenigen mit einer ungeraden Zahl von Inversionen.

Man kann dieses Resultat leicht erweitern. Sind $q_1, q_2, \dots q_n$ Zahlen, deren Summe 0 beträgt, und multipliciert man die Gleichungen ... der Reihe nach mit $q_1, q_2, \dots q_n$, $q_{n+1} = q_1$, $q_{n+2} = q_2$,

Man erkennt, dass, sobald ein gew...
schritten ist, bei jedem $\varkappa$ die einfache ...

$$(\eta) \qquad I_\varkappa^{(n)} = I_{\varkappa-1}^{(n)} + \dots$$

auftritt. Dies ergiebt sich aus (δ), we...

$$I_\varkappa^{(n)} = I_\varkappa^{(n-1)} + \sum_\alpha \dots$$

$$I_{\varkappa-1}^{(n)} = \sum_\alpha I_{(\varkappa-1)-\alpha}^{(n-1)} \dots$$

Die Formel (η) ist also richtig, sobal...
$\varkappa < n$ ist. Für jede Horizontalreihe gil...
ab das Gesetz (η); in der Tafel sin...
gedruckt.

Man überzeugt sich leicht von ...

A 830722

1894

folgt zunächst

[redacted]

$$\ldots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \cdots$$

ist wiederum Null. Man findet demnach

[redacted]

Man erkennt, dass, sobald ein gewisser Anfangswert von n über-

[redacted]

$$(\eta) \qquad I_x^{(n)} = I_{x-1}^{(n)} + I_x^{(n-1)}$$

auftritt. Dies ergiebt sich aus (δ), wenn wir schreiben

[redacted]

Durch eine Vertauschung zweier Elemente unter einander geht aus einer Complexion einer der beiden Classen eine Complexion der andern Classe hervor. Eine solche Umstellung von zwei Elementen wird **Transposition** genannt. Jede Permutation P_2 ist aus jeder anderen P_1 durch eine Reihe von auf einander folgenden Transpositionen ableitbar. Denn ist

selbst. Ist nun $\sigma + \tau \equiv 0$ (mod.

$\sigma \equiv \tau$ (mod. 2).

Für zwei Elemente 1, 2 ist d

bar klar. Es genügt daher, seine

zu zeigen, unter der Voraussetzung

…ung zweier Elemente unter einander geht

[redacted]

…ne solche Umstellung von zwei Elementen …nnt. Jede Permutation P_2 ist aus jeder …ihe von auf einander folgenden Trans-

[redacted]

selbst. Ist nun $\sigma + \tau \equiv 0$ (mod. 2), so ist, wie behauptet wurde.

[redacted]

Für zwei Elemente 1, 2 ist der jetzt formulierte Satz unmittelbar klar. Es genügt daher, seine Richtigkeit für $(n+1)$ Elemente zu zeigen, unter der Voraussetzung, dass er bei n Elementen richtig

[redacted]