

Scdr

A5283

etc

Guy and others

Correspondence

~~75~~ pages

Add to many segs



THE
UNIVERSITY
OF CALGARY

2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4

Faculty of SCIENCE
Department of MATHEMATICS & STATISTICS

Telephone (403) 220-5202

88-03-14

Neil J.A. Sloane,
AT&T Bell Laboratories, Room 2C-376,
600 Mountain Avenue,
Murray Hill, N.J. 07974

Dear Neil,

To save your having to wade through the enclosed, I enclose a copy of the article referred to, and I highlight items of possible interest in the enclosed table:

The leading diagonal & 3 diagonals above it are Sloane ## 644, 583, 1132, 1416. They can now be extended to the canonical two lines. You may want to add more diagonals. Rows 1 and 2 are Sloane ## 173 & 522. You might want to add further rows

✓ 1, 6, 15, 29, 49, 76, 111, 155, ... → 5286
 ✓ 5, 20, 49, 98, 174, 285, 440, ... → 5287
 ✓ (1), 2 or 3, 22, 71, 169, 343, 628, 1068, ... → 5288
 1, 20, 90, 259, 602, 1230, 2298, 4015, ...

which are given to about enough terms to fill two lines.

Best wishes,

Yours sincerely,

Richard

RKG:1

Richard K. Guy.

encl: Math. Mag. article
 letter to Moritz & Williams
 Table)
 pp.94-97 of Netto)

707
 1892
 1893
 1894
 5283
 5284
 5285
 5286
 5287
 5288
 8302
 140
 4/4



THE
UNIVERSITY
OF CALGARY

2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4

Faculty of SCIENCE
Department of MATHEMATICS & STATISTICS

Telephone (403) 220-5202

88-03-12

Professors Roger H. Moritz and Robert C. Williams,
Alfred University,
ALFRED, N.Y. 14802

Dear Roger Moritz & Robert Williams,

I write in connexion with your note in the February *Math. Mag.* The maximum members of the rows of your Table 1 comprise sequence #655 in N.J.A. Sloane's *Handbook of Integer Sequences*, where they are called Kendall-Mann numbers. The references, which I haven't pursued, are to F.N. David, M.G. Kendall & D.E. Barton, *Symmetric Function and Allied Tables*, Cambridge University Press, London, 1966, and to *IEEE Trans. Electronic Comput.* 19 (1970) 1226. A140

The leading diagonal, $n = k+1$, of the table is sequence #644 in Sloane. The reference is to E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901, 1927, reprinted Chelsea, page 96 where your Table 1 occurs, with rows and columns interchanged. Netto (and Sloane) gives only one more entry than you do, but the beginnings of several more columns (your rows). I have extended the table quite a bit and enclose a copy. I will also copy this to Sloane, so that he can put more terms in sequence #644 in his second edition: A707

701 1, 1, 2, 6, 20, 71, 259, 961, 3606, 13640, 51909, 198497, 762007, 2934764, 11333950, 43874857, 170193528, 661386105, 2574320659, 10034398370, ... ✓

Some other diagonals of the table might qualify for inclusion in Sloane's next edition, as well as some (more) rows (your columns). At a second look, I find that he does have the next three above the main diagonal (sequences 583, 1132, 1416) but none below. For the rows he has sequence 173, of course, and sequence 522, but no others.

Netto also gives the recurrences equivalent to your Theorem 3. He also gives formulas for what I will write as $I(n, k)$ for $k \leq 6$. This is an adaptation of his notation: your pointed bracket notation is used in some not unrelated parts of combinatorics, I think for Gaussian binomial coefficients in partition theory. Indeed, there are probably connexions with "q-series", where the q , curiously enough, is (formally) the same as in your article.

After a lot of experimentation I was able to combine his formulas into a single formula, which presumably extends to all k , though I have checked it only for $k \leq 19$. It is not a closed formula, because the number of terms is unbounded, but, as their number is only about $\sqrt{8k/3}$, it is quite practical. The pentagonal numbers which occur are well-known in partition theory (see for example Euler's theorem, Theorem 353 (page 284) in Hardy & Wright's *Introduction to the Theory of Numbers* 4th edition, 1960) and I will also copy this to George Andrews, who can confirm that the formula is well known to those who well know it.

$$I(n, k) = \sum (-1)^r \binom{n-1 + k - \frac{1}{2}r(3r+1)}{n-1} \quad (n \geq k)$$

where the sum is taken over those (positive, negative and zero) values of r for which $\frac{1}{2}r(3r+1) \leq k$. For example,

$$I(n, 16) = \binom{n+15}{16} - \binom{n+14}{15} - \binom{n+13}{14} + \binom{n+10}{11} + \binom{n+8}{9} - \binom{n+3}{4} - \binom{n}{1}.$$

It is possible to correct the formula for values of $n < k$, and the following examples presumably extend in the way suggested for the main formula:

$$\begin{aligned} \text{For } 1 \leq n = k-1, \text{ add} \quad & 1 = \binom{n}{0} = \binom{k-1}{0} \\ \text{For } 1 \leq n = k-2, \text{ add} \quad & n = \binom{n+1}{1} - \binom{n}{0} = \binom{k-1}{1} - \binom{k-2}{0} \\ \text{For } 2 \leq n = k-3, \text{ add} \quad & \binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{1} - \binom{n}{0} = \binom{k-1}{2} - \binom{k-2}{1} - \binom{k-3}{0} \\ \text{For } 3 \leq n = k-4, \text{ add} \quad & \binom{n+3}{3} - \binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{1} = \binom{k-1}{3} - \binom{k-2}{2} - \binom{k-3}{1} \\ \text{For } 4 \leq n = k-5, \text{ add} \quad & \binom{n+4}{4} - \binom{n+3}{3} - \binom{n+2}{2} = \binom{k-1}{4} - \binom{k-2}{3} - \binom{k-3}{2} \end{aligned}$$

As you imply in your article, it would be nice if this array of numbers appeared in other contexts. At a cursory glance, the other references that I've found seem, essentially, to address similar situations.

Yours sincerely,

Richard K. Guy

RKG:1

Richard K. Guy.

P.S. [Stop press] The formula follows almost immediately from Euler's theorem and your generating function. We want the coefficient of x^k in the expansion of

$$\begin{aligned} & (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \\ = & \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots (1-x^n)}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

= (by Euler's identity, a suitable truncation of)

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r x^{\frac{1}{2}r(3r+1)} (1-x)^{-n} \\ = & \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r x^{\frac{1}{2}r(3r+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1+s \\ s \end{bmatrix} x^s \end{aligned}$$

for $I(n,k)$,

and the formula given in the body of the letter, pops out (summation over s , with $s + \frac{1}{2}r(3r+1) = k$).

It would be nice to find a purely combinatorial proof, like Franklin's proof of Theorem 358 in Hardy & Wright. Perhaps a Ferrers's diagram with binomial coefficients instead of dots?

encl: Table
pp. 94-97 of Netto

cc. G.L. Alexanderson
N.J.A. Sloane
G.E. Andrews

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Mahonian

$A = 8302$

5285

5287

5288

5289

5290

5291

5292

5293

5294

5295

5296

5297

5298

5299

5300

5286

5287

5288

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Anzahl der Inversionen, welche zu 3. gehören. Die Anzahl ist gleich

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} i_{\alpha} - \binom{\mu+1}{2}.$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst die Elemente $i_1, i_2, \dots$ ihrer ansteigenden Grösse nach geordnet; sie mögen $j_1, j_2, \dots, j_{\mu}$ heissen. Diese Anordnung ändert die zu 3. gehörige Inversionenanzahl nicht. Dann giebt j_1 genau $(j_1 - 1)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \dots, (j_1 - 1)$ unter den k vorkommen; das Element j_2 giebt gegen die k genau $(j_2 - 2)$ Inversionen, weil ja die Elemente $1, 2, \dots, (j_1 - 1), (j_1 + 1), \dots, (j_2 - 1)$ unter den k vorkommen, u. s. f. Also erhält man für die Anzahl bei 3. die Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} (j_{\alpha} - \alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\mu} i_{\alpha} - \binom{\mu+1}{2}.$$

Zählt man folglich die Inversionen der i für sich, ebenso die der k für sich und fügt der Summe beider Zahlen den soeben für 3. berechneten Ausdruck bei, so erhält man die Gesamtzahl der Inversionen.

§ 56. Alle $n!$ Permutationen von n Elementen teilen sich in $\frac{1}{2} n!$ Paare von inversen (§ 54) Complexionen. Jedes Paar enthält $\binom{n}{2}$ Inversionen; also besitzen alle Permutationen zusammen

$$\frac{1}{2} \binom{n}{2} n!$$

Inversionen bei der Elementenzahl n .

Wir wollen die Anzahl der Permutationen von n Elementen, welche gerade x Inversionen besitzen, mit $I_x^{(n)}$ bezeichnen. Dann ist

$$(\alpha) \quad \sum_x I_x^{(n)} = n! \quad \left(x = 0, 1, \dots, \binom{n}{2} \right),$$

denn die linke Seite liefert die Zahl aller Permutationen.

Weil ferner $x I_x^{(n)}$ angiebt, wie viele Inversionen in allen $I_x^{(n)}$ vorkommen, so wird nach dem obigen Satze*)

$$(\beta) \quad \sum_x x I_x^{(n)} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} n!; \quad \left(x = 0, 1, \dots, \binom{n}{2} \right).$$

*) Stern hat, Journ. f. Math. 18 (1838) p. 100, die Frage gestellt; Terquem hat sie, Journ. de math. 3 (1838) p. 559, beantwortet.

Da die $n!$ Permutationen in Paare inverser Permutationen geteilt werden können, so giebt es zu jeder mit x Inversionen eine inverse mit $\binom{n}{2} - x$ Inversionen. Folglich ist

$$(\gamma) \quad I_x^{(n)} = I_{\binom{n}{2} - x}^{(n)}.$$

Wir werden jetzt eine Reduktionsformel für $I_x^{(n)}$ herleiten. Diejenigen zu $I_x^{(n)}$ gehörigen Permutationen, welche mit 1 beginnen, haben x Inversionen zwischen den Elementen $2, 3, \dots, n$. Ihre Anzahl ist demnach $I_x^{(n-1)}$. Diejenigen zugehörigen Permutationen, welche mit 2 beginnen, haben nur $(x-1)$ Inversionen zwischen den übrigen Elementen $1, 3, 4, \dots, n$; denn 2 liefert gegenüber 1 schon eine Inversion. Nach der Schlussbemerkung in § 54 giebt dies $I_{x-1}^{(n-1)}$. So geht es fort bis zu $I_{x-n+1}^{(n-1)}$ als der Anzahl derjenigen zugehörigen Permutationen, die mit n beginnen. Wir haben somit

$$(\delta) \quad I_x^{(n)} = \sum_{\alpha} I_{x-\alpha}^{(n-1)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, (n-1));$$

dabei fallen diejenigen Summanden rechts fort, bei denen $x < \alpha$ ist.

Hiernach wird

$$\begin{aligned} I_0^{(n)} &= I_0^{(n-1)} \\ I_1^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} \\ I_{n-1}^{(n)} &= I_0^{(n-1)} + I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \dots + I_{n-1}^{(n-1)} \\ I_n^{(n)} &= I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} + \dots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} \\ I_{n+1}^{(n)} &= I_2^{(n-1)} + \dots + I_{n-1}^{(n-1)} + I_n^{(n-1)} + I_{n+1}^{(n-1)} \\ &\dots \dots \dots \\ I_{\binom{n}{2}}^{(n)} &= \dots \dots \dots + I_{\binom{n-1}{2}}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Tabelle tritt in jeder Spalte dasselbe $I_x^{(n-1)}$ genau n -mal auf. Addiert man alle diese Gleichungen spaltenweise, so gelangt man zu

$$\sum_x I_x^{(n)} = n \sum_x I_x^{(n-1)},$$

und dies führt auf die frühere Formel (α) . Multipliziert man die Gleichungen abwechselnd mit $+1$ und -1 und summiert sie dann, so ergiebt sich für ein gerades n direct

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - I_3^{(n)} + \dots = 0.$$

goes with Guy's letter

Für ein ungerades n folgt zunächst

$$I_0^{(n)} - I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \dots = I_0^{(n-1)} - I_1^{(n-1)} + I_2^{(n-1)} - \dots$$

und da $(n-1)$ ungerade ist, wiederum Null. Man findet demnach allgemein

$$(\xi) \quad \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} I_{\alpha}^{(n)} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \binom{n}{2}),$$

d. h. die Anzahl aller Permutationen von n Elementen mit einer geraden Zahl von Inversionen ist gleich derjenigen mit einer ungeraden Zahl von Inversionen.

Man kann dieses Resultat leicht erweitern. Sind $q_1, q_2, \dots, q_n$ Zahlen, deren Summe 0 beträgt, und multipliciert man die Gleichungen des Schemas der Reihe nach mit $q_1, q_2, \dots, q_n$, $q_{n+1} = q_1$, $q_{n+2} = q_2$, ..., $q_{2n+1} = q_1, \dots$, so wird auch hier

$$(\xi) \quad \sum_{\alpha} q_{\alpha} I_{\alpha}^{(n)} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \binom{n}{2}).$$

§ 57. Man hat $I_0^{(n)} = 1$, wie oben gezeigt worden ist. Ferner ist $I_1^{(n)} = (n-1)$. Denn für die n Elemente $1, 2, \dots, n$ giebt es nur als Permutationen mit einer einzigen Inversion die folgenden

$$2134 \dots n; 1324 \dots n; \dots 1234 \dots (n-2)n(n-1).$$

Mit Hilfe der Reductionsformel (§6) kann man jetzt die Werte der I leicht berechnen; wir stellen sie für die kleinsten n und α im Folgenden zusammen.*)

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2		2	5	9	14	20	27	35	44	54	
3			1	6	15	29	49	76	111	155	209
4				5	20	49	98	174	285	440	649
5					3	22	71	169	343	628	1068
6						1	20	90	259	602	1230
7							15	101	359	961	2191
								9	101	455	
									4	90	513

*) Vgl. J. Bourget, Nouv. Ann. (2) 10 (1871) p. 254. Hier werden als conjugierte Permutationen solche bezeichnet, deren Inversionen in gewissen, sich ergänzenden Beziehungen stehen. 4) 513

29 531
14 455
5 329

Man erkennt, dass, sobald ein gewisser Anfangswert von n überschritten ist, bei jedem α die einfache Relation

$$(\eta) \quad I_{\alpha}^{(n)} = I_{\alpha-1}^{(n)} + I_{\alpha}^{(n-1)}$$

auftritt. Dies ergibt sich aus (§6), wenn wir schreiben

$$I_{\alpha}^{(n)} = I_{\alpha}^{(n-1)} + \sum_{\alpha} I_{(\alpha-1)-\alpha}^{(n-1)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, (n-2));$$

$$I_{\alpha-1}^{(n)} = \sum_{\alpha} I_{(\alpha-1)-\alpha}^{(n-1)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, (n-1))$$

Die Formel (η) ist also richtig, sobald $I_{\alpha-n}^{(n-1)} = 0$ wird, d. h. sobald $\alpha < n$ ist. Für jede Horizontalreihe gilt also von dem $(\alpha+1)$ ten Gliede ab das Gesetz (η); in der Tafel sind die betreffenden Glieder fett gedruckt.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Formeln, indem man die Werte für kleine n prüft und dann die Formel (η) zur Anwendung bringt;

$$I_0^{(n)} = 1;$$

$$I_1^{(n)} = n-1;$$

$$I_2^{(n)} = \binom{n}{2} - 1;$$

$$I_3^{(n)} = \binom{n+1}{3} - n;$$

$$I_4^{(n)} = \binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2};$$

$$I_5^{(n)} = \binom{n+3}{5} - \binom{n+2}{3} + 1;$$

$$I_6^{(n)} = \binom{n+4}{6} - \binom{n+3}{4} + n.$$

Die vorletzte Formel gilt erst von $n=5$ an; bei $n=4$ ergibt sie 2 statt 3. Die letzte Formel gilt erst von $n=6$ ab.

§ 58. Eine Complexion verschiedener Elemente wird zur ersten oder zur zweiten Classe gerechnet, oder auch als gerade bzw. ungerade Complexion bezeichnet*), je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen besitzt. Verteilt man alle $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen in die beiden Classen, so enthält nach (§5) eine jede der beiden Classen gleich viele Permutationen.

*) E. Bézout (l. c.). A. L. Cauchy, Journ. de l'Éc. pol. cah. 17 (1815) p. 41. — K. G. Jacobi, Journ. f. Math. 22 (1841) p. 286 = Werke 3 p. 359 spricht von positiver und negativer Classe.