

Nörlund DE'S
~ 1900

→ 1896
- 1905

182

~~1858~~

144 Sechstes Kapitel. Die höheren Bernoullischen und Eulerschen Polynome.

Im Falle $n = 1$, $\omega_1 = 1$, also bei den gewöhnlichen Bernoullischen und Eulerschen Polynomen und Zahlen, haben wir die soeben angeführten Entwicklungen bereits in Kapitel 2, § 3 kennen gelernt.

§ 5. Zusammenfallende Spannen.

76. Was tritt ein, wenn zwei Spannen zusammenfallen? Wir wollen beweisen, daß sich dann ein Bernoullisches Polynom n -ter Ordnung mit Hilfe dreier Bernoullischer Polynome $(n-1)$ -ter Ordnung, ein Eulersches Polynom n -ter Ordnung mit Hilfe zweier Eulerscher Polynome $(n-1)$ -ter Ordnung linear ausdrücken läßt. Zu dem Ende differenzieren wir in der Gleichung (77) nach ω_1 . Dann entsteht

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!} \frac{\partial}{\partial \omega_1} B_v^{(n)}(x | \omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{\omega_2 \cdots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} - 1) \cdots (e^{\omega_n t} - 1)} - \frac{\omega_1 \cdots \omega_n t^{n+1} e^{(x+\omega_1)t}}{(e^{\omega_1 t} - 1)^2 \cdots (e^{\omega_n t} - 1)}.$$

Die rechte Seite geht, wenn man nach Potenzen von t entwickelt, über in

$$\frac{1}{\omega_1} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!} [B_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) - B_v^{(n+1)}(x + \omega_1 | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n)];$$

durch Koeffizientenvergleichung bekommt man daher

$$\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} B_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) = B_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) - B_v^{(n+1)}(x + \omega_1 | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n).$$

Schreiben wir diese Relation in der Gestalt

$$(79) \quad B_v^{(n+1)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) = B_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) - v \omega_1 B_{v-1}^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} B_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n),$$

so erscheint, wie wir behauptet hatten, $B_v^{(n+1)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n)$ durch drei Polynome n -ter Ordnung ausgedrückt. Ganz entsprechend findet man durch Differentiation der Beziehung (78) nach ω_1

$$(80) \quad E_v^{(n+1)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) = 2 E_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) + \frac{2}{v+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} E_v^{(n)}(x | \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n).$$

Setzen wir $x = 0$, so bekommen wir folgende Ausdrücke für die Formen $B_v^{(n+1)}$ und $E_v^{(n+1)}$ mit zwei zusammenfallenden Spannen:

$$(79^*) \quad B_v^{(n+1)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n] = B_v^{(n)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n] \\ - v \omega_1 B_{v-1}^{(n)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n] - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} B_v^{(n)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n],$$

$$(80^*) \quad C_v^{(n+1)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n] = 2 C_v^{(n)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n] \\ + \frac{1}{v+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} C_{v+1}^{(n)}[\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n].$$

77. Noch viel wesentlichere Vereinfachungen treten ein, wenn alle Spannen denselben Wert annehmen, z. B. den Wert 1. Dann erhalten wir gewisse Zahlen und Polynome, welche z. B. bei vielen Untersuchungen im Gebiete der Gammafunktion und verwandter Funktionen vorkommen und uns im weiteren Verlaufe unserer Betrachtungen oft von Nutzen sein werden. Hierbei ergeben sich auch mancherlei interessante Aufschlüsse über die Faktorielle $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

Die Gleichung (77) für die erzeugende Funktion der höheren Bernoullischen Polynome geht im Falle lauter gleicher Spannen vom Werte 1 über in die einfachere Beziehung

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} B_v^{(n)}(x), \quad |t| < 2\pi,$$

aus der man durch Differentiation nach t und Anwendung der Differenzengleichung für $B_v^{(n+1)}(x)$ die Formel

$$(81) \quad B_v^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{v}{n}\right) B_v^{(n)}(x) + (x-n) \frac{v}{n} B_{v-1}^{(n)}(x)$$

entnimmt. Diese Formel gestattet, unter Zugrundelegung der gewöhnlichen Bernoullischen Polynome $B_v(x)$ nacheinander die Polynome $B_v^{(2)}(x)$, $B_v^{(3)}(x)$, ... zu bestimmen; sie gilt übrigens auch, wenn n negativ ist, wie man durch Differentiation der erzeugenden Funktion der Polynome von negativer Ordnung erkennt. Für die Eulerschen Polynome besteht die analoge Beziehung

$$(82) \quad E_v^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n} E_{v+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n} (x-n) E_v^{(n)}(x).$$

Insbesondere ergeben sich für $x=0$ als Rekursionsformeln für die Zahlen $B_v^{(n+1)}$ und $C_v^{(n+1)}$ die Gleichungen

$$(81^*) \quad B_v^{(n+1)} = \left(1 - \frac{v}{n}\right) B_v^{(n)} - v B_{v-1}^{(n)},$$

$$(82^*) \quad C_v^{(n+1)} = 2 C_v^{(n)} + \frac{1}{n} C_{v+1}^{(n)}.$$

Auch wollen wir für später die Beziehung

$$B_v^{(n+1)}(1) = \left(1 - \frac{v}{n}\right) B_v^{(n)}$$

anmerken.

Beachtet man, daß

$$B_v^{(n+1)} = \sum_{s=0}^v \binom{v}{s} B_s B_{v-s}^{(n)},$$

$$C_v^{(n+1)} = \sum_{s=0}^v \binom{v}{s} C_s C_{v-s}^{(n)}$$

ist und daß alle B_s mit ungeradem Index größer als 1 und alle C_s mit geradem positiven Index verschwinden, so liest man aus (81*) und (82*) die weiteren Rekursionsformeln

$$(83) \quad B_v^{(n)} = -\frac{n}{v} \sum_{s=1}^v (-1)^s \binom{v}{s} B_s B_{v-s}^{(n)},$$

$$(84) \quad C_{v+1}^{(n)} = -n \sum_{s=0}^v (-1)^s \binom{v}{s} C_s C_{v-s}^{(n)}$$

ab. Die Rekursionsformeln (81*), (82*), (83), (84) sind besonders geeignet zur Bestimmung der Größen $B_v^{(n)}$ und $C_v^{(n)}$. Mittels der Gleichungen

$$D_v^{(n)} = (2 B_v^{(n)} + n)^v, \quad E_v^{(n)} = (C_v^{(n)} + n)^v$$

kann man nachher die $D_v^{(n)}$ und $E_v^{(n)}$ ermitteln. Alle diese Größen treten bei vielen Problemen der Analysis auf. Sie sind Polynome in n , z. B. ist¹⁾

$$\begin{aligned} B_0^{(n)} &= 1, & B_1^{(n)} &= -\frac{n}{2}, \\ B_2^{(n)} &= \frac{n(3n-1)}{12}, & B_3^{(n)} &= -\frac{n^2(n-1)}{8}, \\ B_4^{(n)} &= \frac{n(15n^2-30n+5)}{240}, & B_5^{(n)} &= -\frac{n^2(n-1)(3n^2-7n-2)}{96}. \end{aligned}$$

Dies legt eine neue Verallgemeinerung nahe. Während bisher die Ordnung n eine ganze Zahl war, kann man sie jetzt als *beliebige komplexe Veränderliche* ansehen. Die so definierten Polynome $B_v^{(z)}$ sind dann die Entwicklungskoeffizienten in der Reihenentwicklung

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^z = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} B_v^{(z)}, \quad |t| < 2\pi.$$

bei komplexem z , welche als Sonderfälle die Reihenentwicklungen für die erzeugenden Funktionen der Bernoullischen Polynome mit lauter

¹⁾ Weitere Angaben über die Polynome $B_v^{(n)}$ sowie über die Polynome $D_v^{(n)}$ findet man in Tafel 5 und 6 am Schlusse des Buches.

gleichen Spannen von positiver oder negativer ganzzahliger Ordnung enthält. Eine andere Reihe, in der die $B_\nu^{(2)}$ vorkommen, ist

$$\left\{ \frac{\log(1+t)}{t} \right\}^z = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{B_\nu^{(z+\nu)}}{z+\nu}, \quad |t| < 1.$$

78. Wählt man in (81) $\nu = n$, so entsteht die Relation

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-n) B_{n-1}^{(n)}(x).$$

Wegen $B_0^{(1)}(x) = 1$ folgt aus ihr

$$(85) \quad B_n^{(n+1)}(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

also wird

$$B_n^{(n+1)} = (-1)^n n!$$

und

$$D_n^{(n+1)} = (-1)^{\frac{n}{2}} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-1))^2 \text{ für gerades } n.$$

$$D_n^{(n+1)} = 0 \quad \text{für ungerades } n.$$

Durch (85) wird die Faktorielle $(x-1)\cdots(x-n)$ als Bernoullisches Polynom ausgedrückt. Weiter kann man schließen, daß

$$B_n^{(n)}(x) = \int_x^{x+1} (t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt,$$

also speziell

$$B_n^{(n)} = \int_0^1 (t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt,$$

$$B_{n+1}^{(n)} = -n \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n) dt$$

ist. Andererseits gewinnen wir für $\nu \leq n$

$$(86) \quad B_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!} \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} (x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

insbesondere

$$B_{n-1}^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n} (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n} \right)$$

und

$$B_n^{(n+2)} = (-1)^n n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$D_n^{(n+2)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} 2^n \left[\left(\frac{n}{2} \right)! \right]^2 \quad \text{für gerades } n.$$

Die Formel (86) gestattet, die Ableitungen der Faktoriellen $(x-1)\cdots(x-n)$ durch die $B_v^{(n+1)}(x)$ auszudrücken. Insonderheit erhält man im Punkte $x=0$ für $p=0, 1, 2, \dots, n$

$$\left(\frac{d^p}{dx^p}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]\right)_{x=0} = \frac{n!}{(n-p)!} B_{n-p}^{(n+1)},$$

woraus sich folgende Entwicklung der Faktoriellen $(x-1)\cdots(x-n)$ nach Potenzen von x ergibt:

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-n) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s B_{n-s}^{(n+1)}.$$

Diese Entwicklung lehrt, daß die in ihrer Bedeutung zuerst von Stirling [2] erkannten Zahlen $(-1)^s \binom{n}{s} B_s^{(n+1)}$ für $s \leq n$ positive ganze Zahlen sind. Bei der numerischen Differentiation und Integration in Kapitel 8, § 7 werden wir oft auf den eben auseinandergesetzten Zusammenhang der Faktoriellen mit Bernoullischen Polynomen zurückzugreifen haben.

Wenn wir in (81) $n=1, 2, \dots$ setzen und vollständige Induktion anwenden, gelangen wir zu der Formel

$$\begin{aligned} (87) \quad B_v^{(n+1)}(x) &= (n+1) \binom{v}{n+1} \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \frac{B_{v-n+s}(x)}{v-n+s} D_x^s[(x-1)\cdots(x-n)] \\ &= (n+1) \binom{v}{n+1} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{B_{v-s}(x)}{v-s} B_s^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Sie ermöglicht, die Bernoullischen Polynome beliebiger positiver Ordnung mit lauter gleichen Spannen in einfacher Weise aus den Bernoullischen Polynomen erster Ordnung aufzubauen; für $v \leq n$ reduziert sie sich auf die Gleichung (86). Bei den Eulerschen Polynomen besteht die ähnliche Beziehung

$$\begin{aligned} (88) \quad E_v^{(n+1)}(x) &= \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^{n-s}}{s!} E_{v+s}(x) D_x^s[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)] \\ &= \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} E_{v+s}(x) B_{n-s}^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Für $x=0$ bekommt man aus den letzten beiden Gleichungen die Beziehungen

$$B_v^{(n+1)} = (n+1) \binom{v}{n+1} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{B_{v-s}}{v-s} B_s^{(n+1)},$$

$$C_v^{(n+1)} = \frac{2^n}{n!} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} 2^{-s} C_{v+s} B_{n-s}^{(n+1)}.$$

Vergleichen wir die Entwicklung der Faktoriellen $(x-1)\cdots(x-\nu)$ nach Potenzen von x

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(\nu+1)}$$

mit der nach der früheren Formel (50) bestehenden Gleichung

$$B_{\nu}^{(n+\nu+1)}(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x) B_{\nu-s}^{(\nu+1)},$$

so können wir die symbolische Relation

$$(89) \quad (B^{(n)} + x - 1)(B^{(n)} + x - 2)\cdots(B^{(n)} + x - \nu) = B_{\nu}^{(n+\nu+1)}(x)$$

ablesen. Insonderheit ergeben sich für $x=0, 1, \nu+n-1, \nu+n$ folgende Rekursionsformeln:

$$(B^{(n)} - 1)(B^{(n)} - 2)\cdots(B^{(n)} - \nu + 1)(B^{(n)} - \nu) = B_{\nu}^{(n+\nu+1)},$$

$$B^{(n)}(B^{(n)} - 1)(B^{(n)} - 2)\cdots(B^{(n)} - \nu + 1) = \frac{n}{n+\nu} B_{\nu}^{(n+\nu)},$$

$$(B^{(n)} + n + 1)(B^{(n)} + n + 2)\cdots(B^{(n)} + n + \nu - 1)(B^{(n)} + n + \nu) = (-1)^{\nu} B_{\nu}^{(n+\nu+1)},$$

$$(B^{(n)} + n)(B^{(n)} + n + 1)(B^{(n)} + n + 2)\cdots(B^{(n)} + n + \nu - 1) = (-1)^{\nu} \frac{n}{n+\nu} B_{\nu}^{(n+\nu)}.$$

Für $n=1$ vereinfachen sich die rechten Seiten zu

$$(-1)^{\nu} \nu! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu+1}\right),$$

$$(-1)^{\nu} \frac{\nu!}{\nu+1},$$

$$\nu! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu+1}\right)$$

$$\frac{\nu!}{\nu+1}.$$

Analoge Entwicklungen sind für die $D_{\nu}^{(n)}$ vorhanden; man bekommt sie, wenn man in (89) x durch $x + \frac{n}{2}$ ersetzt.

79. Die für ein Polynom ν -ten Grades bereits in Kapitel 1, § 3 in der Gestalt

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{x}{s} \triangle^s f(y)$$

hergeleitete Newtonsche Interpolationsformel ermöglicht für $f(x) = B_{\nu}^{(n)}(x)$ die Darstellung

$$(90) \quad B_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x(x-1)\cdots(x-s+1) B_{\nu-s}^{(n-s)}(y).$$

Diese wichtige Gleichung enthält bei $\nu > n$ Bernoullische Polynome teils positiver, teils negativer Ordnung und ist die Quelle einiger sehr bemerkenswerter Relationen. Für $y=0$ und $y=1$ liefert sie unter Benutzung der Beziehung

$$B_{\nu-s}^{(n+1-s)}(1) = \frac{n-\nu}{n-s} B_{\nu-s}^{(n-s)}$$

die Gleichungen

$$B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x(x-1)\cdots(x-s+1) B_{\nu-s}^{(n-s)},$$

durch welche das Bernoullische Polynom $B_\nu^{(n)}(x)$ nach Faktoriellen entwickelt wird, und

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = (n-\nu) \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} (x-1)(x-2)\cdots(x-s) \frac{B_{\nu-s}^{(n-s)}}{n-s}.$$

Weiter gibt die Formel (90) für $n=0$ in den Relationen

$$(x+y)^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x(x-1)\cdots(x-s+1) B_{\nu-s}^{(-s)}(y),$$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x(x-1)\cdots(x-s+1) B_{\nu-s}^{(-s)}$$

Entwicklungen der positiven Potenzen von x , von denen die letzte zur Entwicklung der Faktoriellen $(x-1)\cdots(x-\nu)$ nach Potenzen von x reziprok ist. Schließlich führt die Gleichung (90) für $\nu=n$ einerseits nach Division durch x mittels des Grenzübergangs $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, andererseits für $x=n$ zu Rekursionsformeln zwischen den Zahlen $B_n^{(n)}$, nämlich zu

$$\sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{n-s+1} \frac{B_s^{(s)}}{s!} = 1$$

und

$$\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{B_s^{(s)}}{s!} = (-1)^n \frac{B_n^{(n)}}{n!}.$$

Die Zahlen $B_n^{(n)}$ treten als Koeffizienten in der Reihenentwicklung

$$\frac{t}{(1+t) \log(1+t)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(\nu)}$$

auf und
(vgl. Kap

$B_0^{(0)}$

bis zu E
nommen
We
hung (9
 $x(x-1)$
merkwür

die durch
polynom
wird über

§ 6

80.
der Bo
nehmen
Bernoull
stehende
in diese
als pos
Zu
 $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$

(91)

genügen
Eulersch

(92) $\bar{E}$

auf und sind z. B. auch für die mechanische Quadratur von Bedeutung (vgl. Kap. 8, § 7). Die ersten von ihnen lauten:

$$\begin{aligned} B_0^{(0)} &= 1, & B_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}, & B_2^{(2)} &= \frac{5}{6}, & B_3^{(3)} &= -\frac{9}{4}, \\ B_4^{(4)} &= \frac{251}{30}, & B_5^{(5)} &= -\frac{475}{12}, \end{aligned}$$

bis zu $B_{12}^{(12)}$ können sie aus Tafel 7 am Schlusse des Buches entnommen werden.

Wenn man schließlich in der schon vielfach benützten Beziehung (90) $n = \nu + 1$ nimmt und zur Abkürzung die Faktorielle $x(x-1)(x-2)\cdots(x-s+1)$ mit $x^{[s]}$ bezeichnet, so entstehen die merkwürdigen Relationen

$$(x+y)^{[\nu]} = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x^{[s]} y^{[\nu-s]},$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{[\nu]} = \sum_{s_1 + \cdots + s_n = \nu} \frac{\nu!}{s_1! \cdots s_n!} x_1^{[s_1]} \cdots x_n^{[s_n]},$$

die durch ihre ganze Bauart dazu auffordern, sie den *binomischen und polynomischen Satz der Faktoriellen* zu nennen. In der letzten Gleichung wird über alle nichtnegativen ganzen s mit $s_1 + \cdots + s_n = \nu$ summiert.

§ 6. Verallgemeinerungen der Booleschen und der Euler-Maclaurinschen Summenformel.

80. Um die in § 1 und § 2 angekündigten Verallgemeinerungen der Booleschen und der Euler-Maclaurinschen Summenformel vornehmen zu können, führen wir gewisse mit den Eulerschen und Bernoullischen Polynomen $E_\nu^{(n)}(x)$ und $B_\nu^{(n)}(x)$ in Zusammenhang stehende Funktionen $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$ und $\bar{B}_\nu^{(n)}(x)$ ein [42]. Hierbei setzen wir, wie in diesem Paragraphen durchweg, alle auftretenden Spannen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ als *positiv* voraus.

Zunächst befassen wir uns mit der Funktion $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$, ausführlicher $\bar{E}_\nu^{(n)}(x | \omega_1 \cdots \omega_n)$. Diese Funktion soll der Gleichung

$$(91) \quad \nabla_{\omega_1 \cdots \omega_n} \bar{E}_\nu^{(n)}(x) = 0$$

genügen und außerdem im Intervall $0 \leq x < \omega_1 + \cdots + \omega_n$ mit dem Eulerschen Polynom $E_\nu^{(n)}(x)$ übereinstimmen, es soll also

$$(92) \quad \bar{E}_\nu^{(n)}(x | \omega_1 \cdots \omega_n) = E_\nu^{(n)}(x | \omega_1 \cdots \omega_n), \quad 0 \leq x < \omega_1 + \cdots + \omega_n,$$

Tafeln.

In den folgenden Tafeln findet man eine Zusammenstellung numerischer Werte für einige der im Buche vorkommenden Zahlen. Diese Werte sind von Herrn Dr. A. Walther sämtlich vollständig neu berechnet und erst nachher mit den Angaben in der Literatur, soweit solche vorliegen, verglichen worden.

Die Tafeln 1, 2, 3 und 4 enthalten die von Null verschiedenen unter den Bernoullischen Zahlen B_ν , den Eulerschen Zahlen E_ν und den mit ihnen zusammenhängenden Zahlen C_ν und D_ν (vgl. Kap. 2, § 2) bis zu $\nu = 30$ bzw. $\nu = 20$. Die Bernoullischen Zahlen B_ν bis zu $\nu = 10$ stehen bei Jakob Bernoulli [1, 2], bis zu $\nu = 30$ bei Euler [10], bis zu $\nu = 62$ bei Ohm [2], bis zu $\nu = 124$ bei J. C. Adams [1, 4] und bis zu $\nu = 184$ bei Serebrennikoff [1, 2]. Die Eulerschen Zahlen E_ν bis zu $\nu = 16$ sind verzeichnet bei Euler [10, 25], bis zu $\nu = 28$ bei Scherk [1], bis zu $\nu = 54$ bei Glaisher [4], bis zu $\nu = 100$ bei Joffe [1, 2], die Zahlen C_ν bis zu $\nu = 29$ bei Saalschütz [1].

Tafel 5 gibt die Polynome $B_\nu^{(n)}$, von denen die ersten schon in Kap. 6, § 5 angeführt sind, bis zu $\nu = 12$, Tafel 6 die von Null verschiedenen unter den Polynomen $D_\nu^{(n)}$, ebenfalls bis zu $\nu = 12$.

Die Tafeln 7 bis 14 sollen vornehmlich als Hilfstafeln zur mechanischen Quadratur dienen. In Tafel 7, 8, 11 und 12 sind die in Betracht kommenden Zahlen $B_\nu^{(\nu)}$, $B_\nu^{(\nu-1)}$, $D_{\frac{1}{2}\nu}^{(2\nu)}$ und $D_{\frac{1}{2}\nu}^{(2\nu-1)}$ bis zu $\nu = 12$ bzw. $2\nu = 12$ zu finden, während man aus Tafel 9, 10, 13 und 14 unmittelbar die Koeffizienten für die Formeln (72), (73), (85) und (84) in Kap. 8, § 7 auf 12 Dezimalen entnehmen kann.

Tafel 1.
Bernoullische Zahlen B_v .

v	Zähler von B_v	Nenner von B_v
0	 1	 1
1	 -1	 2
2	 1	 6
4	 -1	 30
6	 1	 42
8	 -1	 30
10	 5	 66
12	 -691	 2 730
14	 7	 6
16	 -3 617	 510
18	 43 867	 798
20	 -174 611	 330
22	 854 513	 138
24	 -236 364 091	 2 730
26	 8 553 103	 6
28	 -23 749 461 029	 870
30	8 615 841 276 005	 14 322

Tangent Nos

182

458

Tafeln.

Tafel 2.
Eulersche Zahlen E_v .

v	E_v
0	 1
2	 -1
4	 5
6	 -61
8	 1 385
10	 -50 521
12	 2 702 765
14	 -199 360 981
16	 19 391 512 145
18	 -2 404 879 675 441
20	 370 371 188 237 525

Tafel 3.
Zahlen C_v .

v	C_v
0	 1
1	 -1
3	 2
5	 -16
7	 272
9	 -7 936
11	 353 792
13	 -22 368 256
15	 1 903 757 312
17	 -209 865 342 976
19	 29 088 885 112 832

Tafel 4.
Zahlen D_v .

v	Zähler von D_v	Nenner von D_v
0	 1	 1
2	 -1	 3
4	 7	 15
6	 -31	 21
8	 127	 15
10	 -2 555	 33
12	 1 414 477	 1 365
14	 -57 337	 3
16	 118 518 239	 255
18	 -5 749 691 557	 399
20	 91 546 277 357	 165

~~1888~~
1896

1897

Tafel 5.

Polynome $B^{(n)}$

C_v	
.....	1
.....	-1
.....	2
.....	-16
.....	272
.....	-7 936
.....	353 792
.....	-22 368 256
.....	903 757 312
.....	865 342 976
.....	885 112 832

D_v	
1	
3	
15	
21	
15	
33	
65	
3	
55	
99	
55	

1898

Tafel 5.
Polynome $B_v^{(n)}$.

v	Zähler von $B_v^{(n)}$	Nenner von $B_v^{(n)}$
0		 1
1		 2
2		 12
3		 8
4		 240
5		 96
6		 4 032
7		 1 152
8		 34 560
9		 7 680
10		 101 376
11		 18 432
12		 50 319 360

Tafel 6.
Polynome $D_v^{(n)}$.

v	Zähler von $D_v^{(n)}$	Nenner von $D_v^{(n)}$
0	 1	 1
2	 $-n$	 3
4	 $n(5n+2)$	 15
6	 $-n(35n^2+42n+16)$	 63
8	 $n(175n^3+420n^2+404n+144)$	 135
10	$-n(385n^4+1540n^3+2684n^2+2288n+768)$	 99
12	$n(175175n^5+1051050n^4+2862860n^3$ $+4252248n^2+3327584n+1061376)$	 12285

	Nenner von $D_v^{(n)}$
.....	1
.....	3
.....	15
.....	63
.....	135
.....	99
.....	12 285

Tafel 7.
Zahlen $B_v^{(v)}$.

v	Zähler von $B_v^{(v)}$	Nenner von $B_v^{(v)}$
0	 1	 1
1	 -1	 2
2	 5	 6
3	 -9	 4
4	 251	 30
5	 -475	 12
6	 19 087	 84
7	 -36 799	 24
8	 1 070 017	 90
9	 -2 082 753	 20
10	 134 211 265	 132
11	 -262 747 265	 24
12	703 604 254 357	 5 460

Tafel 8.
Zahlen $B_v^{(v-1)}$.

v	Zähler von $B_v^{(v-1)}$	Nenner von $B_v^{(v-1)}$
2	 1	 6
3	 -1	 2
4	 19	 10
5	 -9	 1
6	 4 315	 84
7	 -1 375	 4
8	 237 671	 90
9	 -114 562	 5
10	 9 751 299	 44
11	 -9 458 775	 4
12	150 653 570 023	 5 460

Tafel 9.¹⁾
Zahlen $\frac{B_v^{(\nu)}}{v!}$.

ν	$\frac{B_v^{(\nu)}}{v!}$
0	1
1	-0,5
2	0,416 666 666 667
3	-0,375
4	0,348 611 111 111
5	-0,329 861 111 111
6	0,315 591 931 217
7	-0,304 224 537 037
8	0,294 868 000 441
9	-0,286 975 446 429
10	0,280 189 596 444
11	-0,274 265 540 032
12	0,269 028 846 774

Tafel 10.¹⁾
Zahlen $\frac{B_v^{(\nu-1)}}{v!(\nu-1)}$.

ν	$\frac{B_v^{(\nu-1)}}{v!(\nu-1)}$
2	0,083 333 333 333
3	-0,041 666 666 667
4	0,026 388 888 889
5	-0,018 75
6	0,014 269 179 894
7	-0,011 367 394 180
8	0,009 356 536 596
9	-0,007 892 554 012
10	0,006 785 849 985
11	-0,005 924 056 412
12	0,005 236 693 258

Tafel 11.
Zahlen $D_{2\nu}^{(2\nu)}$.

2ν	Zähler von $D_{2\nu}^{(2\nu)}$	Nenner von $D_{2\nu}^{(2\nu)}$
0	 1	 1
2	 -2	 3
4	 88	 15
6	 3 056	 21
8	 319 616	 45
10	 -18 940 160	 33
12	283 936 226 304	 4 095

¹⁾ In der Praxis wird man für $\nu=2$ und $\nu=3$ meist bequemer mit den Brüchen $\frac{5}{12}$ und $-\frac{3}{8}$ bzw. $\frac{1}{12}$ und $-\frac{1}{24}$ rechnen.

Tafel 10.¹⁾
 $B_v^{(\nu-1)}$
 Zahlen $\frac{B_v^{(\nu-1)}}{\nu! (\nu-1)}$.

$\frac{B_v^{(\nu-1)}}{\nu! (\nu-1)}$
0,083 333 333 333
-0,041 666 666 667
0,026 388 888 889
-0,018 75
0,014 269 179 894
-0,011 367 394 180
0,009 356 536 596
-0,007 892 554 012
0,006 785 849 985
0,005 924 056 412
0,005 236 693 258

Tafel 12.
 Zahlen $D_{2\nu}^{(2\nu-1)}$.

2ν	Zähler von $D_{2\nu}^{(2\nu-1)}$	Nenner von $D_{2\nu}^{(2\nu-1)}$
2	 - 1	 3
4	 17	 5
6	 - 1 835	 21
8	 195 013	 45
10	.. - 3 887 409	 11
12	58 621 671 097	 1 365

Tafel 13.¹⁾
 Zahlen $\frac{D_{2\nu}^{(2\nu)}}{(2\nu)! 2^{2\nu}}$.

2ν	$\frac{D_{2\nu}^{(2\nu)}}{(2\nu)! 2^{2\nu}}$
0	1
2	-0,083 333 333 333
4	0,015 277 777 778
6	-0,003 158 068 783
8	0,000 688 106 261
10	-0,000 154 456 687
12	0,000 035 340 280

Tafel 14.¹⁾
 Zahlen $\frac{D_{2\nu}^{(2\nu-1)}}{(2\nu)! (2\nu-1) 2^{2\nu}}$.

2ν	$\frac{D_{2\nu}^{(2\nu-1)}}{(2\nu)! (2\nu-1) 2^{2\nu}}$
2	-0,041 666 666 667
4	0,002 951 388 889
6	-0,000 379 257 606
8	0,000 059 978 075
10	-0,000 010 567 252
12	0,000 001 982 922

¹⁾ In der Praxis sind für $\nu=2$ die Brüche $-\frac{1}{12}$ bzw. $-\frac{1}{24}$ vorzuziehen.